

N° D'ORDRE :
131.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ,

PAR

M. Horace LEVINSON.

1^{re} THÈSE. -- LE CHAMP GRAVITATIONNEL DE DEUX POINTS MATÉRIELS
FIXES DANS LA THÉORIE D'EINSTEIN.

2^e THÈSE. -- PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juin 1923, devant la Commission d'Examen.

MM. ÉMILE BOREL, *Président.*
CARTAN, { *Examineurs.*
BRILLOUIN, {

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^e, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1923





Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ,

PAR

M. Horace LEVINSON.

1^{re} THÈSE. — LE CHÂMP GRAVITATIONNEL DE DEUX POINTS MATÉRIELS
FIXES DANS LA THÉORIE D'EINSTEIN.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juin 1923, devant la Commission d'Examen.

MM. ÉMILE BOREL, *Président.*
CARTAN, } *Examineurs.*
BRILLOUIN, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1923

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen MOLLIARD Professeur. Physiologie végétale.
 Doyen honoraire P. APPELL.
 Professeurs honoraires. P. PUISEUX, VÉLAIN, BOUSSINESQ et PRUVOT.

Professeurs	ÉMILE PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	KÖNIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	GOUSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Électrotechnique générale.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique analyt. et Mécan. céleste.
	HAUG.....	Géologie.
	H. LE CHATELIER.....	Chimie générale.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY.....	Zool. (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie minérale.
	ÉMILE BOREL.....	Calcul des probab. et Phys. math.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Mécanique rationnelle.
	CL. GUICHARD.....	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE.....	Physiologie.
	GENTIL.....	Géographie physique.
	VESSIOT.....	Théorie des groupes et calcul des var.
	COTTON.....	Physique générale.
	DRACH.....	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY.....	Physique.
	CHARLES PEREZ.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et Géol. région.
	DANGEARD.....	Botanique.
	LESPIEAU.....	Théories chimiques.
	LEDUC.....	Physique théorique et Phys. céleste.
	MONTEL.....	Mathématiques générales.
	MAURAIN.....	Physique du globe.
	RABAUD.....	Biologie expérimentale.
	WINTREBERT.....	Anatomie et Physiologie comparées
	HEROUARD.....	Zoologie.
	REMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC.....	Physique théorique et Phys. céleste.
	PORTIER.....	Physiologie.
	BLAISE.....	Chimie organique.
	PÉCHARD.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER.....	Chimie analytique.
	M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
	GUILLET.....	Physique.
	N.....	

Secrétaire D. TOMBECK.



PREMIÈRE THÈSE.

LE CHAMP GRAVITATIONNEL DE DEUX POINTS MATÉRIELS FIXES DANS LA THÉORIE D'EINSTEIN.

1. Le but de ce travail est de trouver les équations du mouvement d'une particule dans le champ gravitationnel de deux autres particules fixes dans le système de référence d'un observateur, selon la nouvelle dynamique créée par la théorie générale de la relativité. La solution de ce problème consiste à déterminer les coefficients de la forme quadratique fondamentale

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}.$$

On résout les équations du champ gravitationnel avec les conditions appropriées aux frontières. Ces conditions sont données plus bas. Nous écrirons les équations sous la forme $G_{\mu\nu} = 0$, c'est-à-dire que nous donnerons au tenseur de la matière la valeur zéro, et que nous considérerons le mouvement de la particule seulement aux points de l'espace qui ne contiennent pas de matière. Sous cette forme, les

équations sont

$$(2) \quad G_{\mu\nu} = - \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \log \sqrt{-g} \\ - \sum_{\alpha=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \log \sqrt{-g} = 0$$

($\mu, \nu = 1, \dots, 4$).

Les symboles $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\}$ sont les symboles de Christoffel, qu'il n'est pas nécessaire d'écrire ici en entier; g est la valeur du déterminant des $g_{\mu\nu}$ dans (1). Les coordonnées doivent être choisies de telle façon que cette quantité soit négative pour toutes les valeurs des variables. Une particule en mouvement dans le champ de deux autres particules va d'un point initial P_0 à un autre point P_1 le long de la géodésique unique qui contient ces deux points. Les équations des géodésiques, ou les équations du mouvement, sont

$$(3) \quad \frac{d^2 x_\tau}{ds^2} + \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0 \quad (\tau = 1, \dots, 4).$$

Ces équations auront une forme explicite lorsque les valeurs des symboles de Christoffel seront connues, c'est-à-dire lorsque les $g_{\mu\nu}$ seront déterminés. Notre problème est alors de trouver les valeurs des $g_{\mu\nu}$.

Nous verrons plus bas que la solution du champ de deux particules nous donnera, par une généralisation très simple, la solution du champ statique de n particules sur une droite.

2. Le développement de la dynamique de la relativité a commencé avec la solution approximative du champ d'un point matériel, donnée par Einstein ⁽¹⁾ en 1915. Cette approximation conduit aux équations du mouvement d'une masse infinitésimale dans le champ d'une masse finie, qui suffisent pour trouver le mouvement du périhélie de l'orbite de Mercure. L'année suivante, une solution

⁽¹⁾ *Sitz. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 1915, n° 47, p. 831.

complète du champ pour ce cas fut donnée par Schwarzschild ⁽¹⁾, qui donna aussi une solution pour le champ d'une masse sphérique fluide. Ce dernier cas a été étendu par M. Brillouin ⁽²⁾ à celui d'une masse sphérique fluide contenant des couches de densités différentes ou dans laquelle la densité varie d'une façon continue. Ce sont les seuls cas dont on ait donné la solution complète. En 1916, des solutions approximatives de n sphères en mouvement arbitraire furent données simultanément par MM. Einstein et Droste. Un résumé de ces deux recherches se trouve dans un article de M. de Sitter dans les *Monthly Notices of the R. A. S.*, 1916, t. LXXVI, n° 9. Ce problème est compliqué par ce fait que les corps qui sont sphériques, s'ils sont fixes dans le système, ne le sont plus quand ils sont en mouvement. Ils subissent la contraction de Lorentz.

Les deux problèmes qui se présentent le plus naturellement aujourd'hui sont celui d'une seule particule en mouvement arbitraire et celui de deux particules fixes. Ici je ne traite que le second problème.

3. Dans la théorie restreinte de la relativité, l'élément linéaire a la forme

$$(4) \quad ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2,$$

où x, y, z sont des coordonnées rectangulaires, t le temps, et c la vitesse de la lumière. Nous considérerons les unités comme choisies de telle façon que $c = 1$. Dans la théorie généralisée, on dit qu'un système pour lequel le ds^2 a la forme (4) manque de champ gravitationnel. Dans le champ d'une particule; il y a symétrie parfaite autour du point qui contient la masse. Il est alors commode d'employer les coordonnées polaires ordinaires; dans ces coordonnées, (4) devient

$$(5) \quad ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2,$$

où r, θ, φ sont définies comme à l'ordinaire.

Dans le champ de deux particules, si nous prenons l'axe de z comme contenant les deux masses, il y aura symétrie autour de cet

(1) *Sitz. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 1916, n° 7, p. 189.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1922, t. 174, p. 1585.

axe. Il est commode d'employer les coordonnées cylindriques

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta,$$

$$z = z,$$

et (4) s'écrit

$$(6) \quad ds^2 = -dr^2 - dz^2 - r^2 d\theta^2 + dt^2.$$

4. Avant d'aborder le champ de deux particules, je voudrais considérer un peu les conditions par lesquelles la solution du champ d'une particule est définie. Je vais leur donner une forme particulière qui nous sera utile pour former les conditions correspondant au cas de deux masses.

Nous appellerons m la masse de la particule située à l'origine des coordonnées, auxquelles nous donnerons la notation

$$x_1 = r,$$

$$x_2 = \theta,$$

$$x_3 = \varphi,$$

$$x_4 = t.$$

La solution du problème sera alors une solution des équations (2) satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Les $g_{\mu\nu}$ sont fonctions continues des variables dans un domaine D_0 qui contient tout l'espace excepté l'intérieur d'une petite sphère, dont le centre est l'origine des coordonnées. A ce point, les $g_{\mu\nu}$ présentent en général des singularités.

b. Les $g_{\mu\nu}$ peuvent s'exprimer en séries entières en m qui convergent pour toutes les valeurs des variables dans D_0 , pourvu que la valeur de m soit assez petite.

c. Les coefficients de $m^\alpha (\alpha > 0)$ dans ces séries sont fonctions de r seule.

d. Pour $m = 0$, les $g_{\mu\nu}$ ont les valeurs données par (5).

e. Pour $r = \infty$, les coefficients de $m^\alpha (\alpha > 0)$ sont tous nuls.

On ajoute quelquefois la condition $g_{i4} = 0 (i = 1, 2, 3)$. Avec nos conditions, on peut démontrer qu'il y a une solution particulière pour laquelle $g_{i4} = 0 (i = 1, 2, 3)$. Nous verrons le fait correspondant pour le cas de deux masses. La preuve est la même ici.

La solution de Schwarzschild est

$$ds^2 = - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2.$$

Si la plus petite valeur de r dans le domaine D_0 est r_0 , on voit tout de suite que les $g_{\mu\nu}$, considérés comme des séries entières en m , sont convergents pour toutes les valeurs des variables dans D_0 si

$$m < \frac{r_0}{2}.$$

Les séries sont de plus absolument convergentes.

Pour les coordonnées cylindriques, la solution devient, si nous gardons les notations du n° 3,

$$(7) \quad ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{u^2} \varphi\right) dr^2 - \left(1 + \frac{z^2}{u^2} \varphi\right) dz^2 - r^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{2m}{u}\right) dt^2 \\ - \frac{2rz}{u^2} \varphi dr dz,$$

où

$$u = \sqrt{r^2 + z^2}, \\ \varphi = \frac{1}{1 - \frac{2m}{u}} - 1 = \frac{2m}{u - 2m}.$$

Les conditions $a, \dots, e$ ne suffisent pas pour définir complètement les coordonnées. Il y a d'autres solutions entre lesquelles et (7) il existe des transformations d'une forme telle que pour $m = 0$ les nouvelles variables deviennent égales aux anciennes.

Un tel système, employé dans les recherches de Einstein et de Droste que j'ai cités plus haut, est d'une forme plus simple que (7). L'élément linéaire dans ce système est

$$(8) \quad ds^2 = - \left[1 + \frac{m}{2u}\right]^4 [dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2] + \frac{\left[1 - \frac{m}{2u}\right]^2}{\left[1 + \frac{m}{2u}\right]^2} dt^2,$$

où

$$u = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

On obtient (8) de (7) par la transformation

$$r = \left[1 + \frac{m}{2u} \right]^2 r'$$

$$z = \left[1 + \frac{m}{2u} \right]^2 z'$$

où r' , z' sont les variables de (8).

5. Nous considérerons le champ de deux particules dans les deux espèces de coordonnées qui se réduisent respectivement aux coordonnées de (7) et (8) si une des masses est nulle. On constatera que les équations à traiter ont la même forme dans ces deux systèmes. Nous abordons maintenant le premier cas.

Je n'essaierai pas d'établir rigoureusement que les conditions par lesquelles nous définirons la solution sont entièrement justifiées.

Supposons que les solutions existent et qu'elles peuvent être développées suivant les puissances croissantes des masses m_1 et m_2 , convergentes dans les conditions exposées. Ces conditions sont entièrement analogues à celles du n° 4 pour le cas d'une particule, excepté la dernière. Les variables ont la notation

$$x_1 = r,$$

$$x_2 = z,$$

$$x_3 = \theta,$$

$$x_4 = t.$$

Nous ne perdons pas en généralité en prenant les particules m_1 et m_2 sur l'axe de z aux points respectifs $z = d_1$ et $z = d_2$, d_1 et d_2 étant des constantes.

Les conditions du problème sont :

A. Les $g_{\mu\nu}$ sont fonctions continues des variables dans le domaine D_1 qui contient tous les points de l'espace, excepté ceux qui sont à l'intérieur de deux petites sphères dont les centres sont respectivement les points $z = d_1$, $r = 0$ et $z = d_2$, $r = 0$, où les $g_{\mu\nu}$ présentent en général des singularités.

B. Les $g_{\mu\nu}$ peuvent être développés en séries entières en m_1 et m_2 qui convergent pour toutes les valeurs des variables dans D_1 pourvu que les valeurs de m_1 et m_2 soient assez petites,

C. Les $g_{\mu\nu}$ sont fonctions de r et de z seules.

D. Pour $m_1 = m_2 = 0$ les $g_{\mu\nu}$ ont les valeurs données par (5).

E. Pour $r = \infty$ ou pour $z = \infty$ les coefficients de $m_1^\alpha m_2^\beta (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ sont tous nuls.

F. Pour $d_1 = d_2$, la solution se réduit exactement à celle du cas d'une masse $m + m_2$ au point $z = d_1$, $r = 0$.

Les $g_{\mu\nu}$ ont alors la forme

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} g_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} b_{\mu\nu}^{(\alpha)} m_1^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\mu\nu}^{(\alpha)} m_2^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} A_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)} m_1^\alpha m_2^\beta \\ \quad [\mu, \nu = 1, \dots, 4 \text{ excepté } (\mu, \nu) = (3, 3)], \\ g_{33} = a_{33} + r^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} b_{33}^{(\alpha)} m_1^\alpha + r^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{33}^{(\alpha)} m_2^\alpha + r^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} A_{33}^{(\alpha\beta)} m_1^\alpha m_2^\beta. \end{array} \right.$$

Le facteur r^2 est introduit dans les trois derniers termes de g_{33} pour simplifier les calculs.

6. Si nous substituons la solution formelle (9) à (2), les équations doivent devenir des identités et le coefficient de $m_1^\alpha m_2^\beta$ doit être égal à zéro pour chaque valeur de $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots)$. Nous emploierons la notation suivante : nous appellerons $G_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)} = 0$ les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients de $m_1^\alpha m_2^\beta$. De plus, nous étendrons la notation au cas où $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou $\alpha = 0, \beta = 0$, ce qui ne créera pas de confusions. Les équations $G_{\mu\nu}^{(00)} = 0$ ne contiennent que les $a_{\mu\nu}$. Nous devons choisir la solution

$$\begin{aligned} a_{\mu\mu} &= -1 & (\mu = 1, 2), \\ a_{33} &= -r^2, \\ a_{44} &= +1, \\ a_{\mu\nu} &= 0 & (\mu, \nu = 1, \dots, 4, \mu \neq \nu). \end{aligned}$$

Les équations $G_{\mu\nu}^{(\alpha 0)} = 0$ contiennent seulement les $a_{\mu\nu}$ et les $b_{\mu\nu}^{(\alpha)}$, et les équations $G_{\mu\nu}^{(0\beta)} = 0$ ne contiennent que les $a_{\mu\nu}$ et les $c_{\mu\nu}^{(\beta)}$. Il est évident que les solutions que nous désirons sont respectivement celle du champ d'une masse m_1 au point $z = d_1$, $r = 0$ et celle d'une masse m_2 au point $z = d_2$, $r = 0$. Puisque les équations (2)

sont covariantes relativement à la forme (1), elles resteront satisfaites si dans (7) nous substituons

$$\begin{aligned} z &= z - d_1, \\ m &= m_1. \end{aligned}$$

Le résultat est immédiatement reconnu comme représentant le champ d'une masse m_1 au point $z = d_1$, $r = 0$. Des considérations exactement identiques sont valables si dans (7) nous substituons

$$\begin{aligned} z &= z - d_2, \\ m &= m_2. \end{aligned}$$

Ainsi nous trouvons immédiatement que les valeurs des $b_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ et des $c_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ de (8) sont

$$\begin{aligned} b_{11}^{(\alpha)} &= -\frac{r^2}{r_1^2} \left(\frac{2}{r_1}\right)^\alpha, & c_{11}^{(\alpha)} &= -\frac{r^2}{r_2^2} \left(\frac{2}{r_2}\right)^\alpha, \\ b_{22}^{(\alpha)} &= -\frac{(z-d_1)^2}{r_1^2} \left(\frac{2}{r_1}\right)^\alpha, & c_{22}^{(\alpha)} &= -\frac{(z-d_2)^2}{r_2^2} \left(\frac{2}{r_2}\right)^\alpha, \\ b_{33}^{(\alpha)} &= 0, & c_{33}^{(\alpha)} &= 0, \\ b_{44}^{(1)} &= -\frac{2}{r_1}, & c_{44}^{(1)} &= -\frac{2}{r_2}, \\ b_{44}^{(2)} &= 0, & c_{44}^{(2)} &= 0 \quad (\alpha > 1), \\ b_{12}^{(\alpha)} &= -\frac{r(z-d_1)}{r_1^2} \left(\frac{2}{r_1}\right)^\alpha, & c_{12}^{(\alpha)} &= -\frac{r(z-d_2)}{r_2^2} \left(\frac{2}{r_2}\right)^\alpha, \\ b_{\mu 4}^{(\alpha)} &= 0, & c_{\mu 4}^{(\alpha)} &= 0 \quad (\mu = 1, 2, 3), \\ b_{\mu 3}^{(\alpha)} &= 0, & c_{\mu 3}^{(\alpha)} &= 0 \quad (\mu = 1, 2). \end{aligned}$$

Les quantités r_1 et r_2 sont

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 + (z-d_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + (z-d_2)^2}. \end{aligned}$$

Les séries $b_{\mu\nu}^{(\alpha)} m_1^\alpha$ et $c_{\mu\nu}^{(\alpha)} m_2^\alpha$ convergent si

$$(10) \quad \begin{cases} m_1 < \frac{r_0}{2}, \\ m_2 < \frac{r_0}{2}, \end{cases}$$

où r_0 est la plus petite valeur de r_1 ou r_2 dans le domaine D_1 .

7. Il résulte de la condition (C) une simplification considérable des équations qui déterminent les $A_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$. Les équations $G_{\mu}^{(\alpha\beta)} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) sont homogènes dans les $A_{\mu}^{(\alpha\beta)}$ et dans leurs premières et secondes dérivées, et ces quantités n'entrent dans aucune des autres équations. Nous pouvons par conséquent satisfaire à chacune des conditions du problème en prenant

$$A_{\mu}^{(\alpha\beta)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, \dots).$$

Pour la même raison, les équations $G_{\mu 3}^{(\alpha\beta)} = 0$ ($\mu = 1, 2$) ne contiennent que les $A_{\alpha\beta}^{(\alpha\beta)}$ et leurs dérivées et ces quantités n'entrent dans aucune des autres équations. Nous pouvons prendre

$$A_{\mu 3}^{(\alpha\beta)} = 0 \quad (\mu = 1, 2; \alpha, \beta = 1, 2, \dots).$$

On trouve aussi que l'équation $G_{44}^{(\alpha\beta)} = 0$ ne contient que $A_{44}^{(\alpha\beta)}$ des $A_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$. Cette équation est par conséquent indépendante des autres et peut être intégrée séparément. Toutes les équations sont linéaires dans les $A_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ et dans leurs premières et secondes dérivées. Les équations sont :

$$\begin{aligned} G_{11}^{(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{22}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\partial^2 A_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} + \psi_{11}^{(\alpha\beta)} = 0, \\ G_{22}^{(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{22}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{22}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial^2 A_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} + \psi_{22}^{(\alpha\beta)} = 0, \\ (11) \quad \frac{1}{r_2} G_{33}^{(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{22}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \psi_{33}^{(\alpha\beta)} = 0, \\ G_{44}^{(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \psi_{44}^{(\alpha\beta)} = 0, \\ G_{12}^{(\alpha\beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} + \psi_{12}^{(\alpha\beta)} = 0, \end{aligned}$$

où les $\psi_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ sont fonctions des $a_{\mu\nu}$, des $b_{\mu\nu}^{(i)}$ ($i=1, \dots, \alpha$), des $c_{\mu\nu}^{(j)}$ ($j=1, \dots, \beta$) et des $A_{\mu\nu}^{(jk)}$ pour lesquels $j+k < \alpha+\beta$ et $j \leq \alpha$, $k \leq \beta$, et où nous avons pris $\alpha \geq \beta$, $j \geq k$, ce qui n'est qu'une question de notation.

8. On résout les équations d'abord pour $\alpha=1$, $\beta=1$. Les $\psi_{\mu\nu}^{(11)}$ sont fonctions des $a_{\mu\nu}$, des $b_{\mu\nu}^{(1)}$ et des $c_{\mu\nu}^{(1)}$, qui sont déjà déterminés. On obtient d'abord la solution de la quatrième équation pour $A_{11}^{(11)}$. Quand ceci est substitué dans les autres, il reste quatre équations pour déterminer les quatre quantités $A_{11}^{(11)}$, $A_{22}^{(11)}$, $A_{33}^{(11)}$, $A_{42}^{(11)}$. Quand celles-ci sont déterminées, on considère les systèmes d'équations pour lesquels $\alpha+\beta=3$. Il y aura deux séries correspondant à $\alpha=2$, $\beta=1$, et $\alpha=1$, $\beta=2$. Ces deux systèmes sont entièrement indépendants l'un de l'autre. Comme auparavant, on résout d'abord la quatrième équation pour $A_{11}^{(21)}$, et il reste quatre équations pour les quatre autres inconnues. Il en est de même pour les $A_{\mu\nu}^{(12)}$. Il est évident que nous pouvons continuer indéfiniment de cette façon. Pour $\alpha+\beta=n$, il y aura $n-1$ systèmes d'inconnues et $n-1$ systèmes d'équations.

9. La quatrième équation de (11) est

$$(12) \quad \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} = 2\psi_{44}^{(\alpha\beta)}.$$

Puisque les $\psi_{44}^{(\alpha\beta)}$ sont développables suivant les puissances de r et z dans un domaine autour de l'origine, on pourra facilement trouver une solution particulière qui satisfera en général à nos conditions. Autrement nous pouvons considérer (12) comme un cas particulier de l'équation de Poisson. Une solution est alors

$$(13) \quad A_{44}^{(\alpha\beta)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{\psi_{44}^{(\alpha\beta)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (r-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

L'intégrale converge sûrement pour un domaine fini quelconque contenu dans D_1 . Pour établir qu'elle converge également pour les limites $r=\infty$, $z=\infty$, il faut connaître quelque peu la forme des $\psi_{44}^{(\alpha\beta)}$. Puisque ces fonctions ne contiennent pas θ , on pourra en général modifier la solution de (13), de sorte que $A_{44}^{(\alpha\beta)}$ sera indépendant de θ .

Il reste quatre équations pour déterminer $\Lambda_{11}^{(\alpha\beta)}$, $\Lambda_{22}^{(\alpha\beta)}$, $\Lambda_{33}^{(\alpha\beta)}$, $\Lambda_{42}^{(\alpha\beta)}$. Nous formons l'expression

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[G_{11}^{(\alpha\beta)} - G_{22}^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{r^2} G_{33}^{(\alpha\beta)} - G_{44}^{(\alpha\beta)} \right] - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r G_{12}^{(\alpha\beta)}] = 0.$$

Les $\Lambda_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ disparaissent complètement de cette expression et nous obtenons

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\psi_{11}^{(\alpha\beta)} - \psi_{22}^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{r^2} \psi_{33}^{(\alpha\beta)} - \psi_{44}^{(\alpha\beta)} \right] - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \psi_{12}^{(\alpha\beta)}] = 0.$$

Ceci doit être une identité; c'est une condition nécessaire pour que les équations soient compatibles. Si nous supposons que la solution de notre problème existe, l'identité (14) est nécessairement vraie. Je l'ai vérifié directement pour le cas $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Il s'ensuit immédiatement que les équations ne sont pas indépendantes. L'équation $G_{12}^{(\alpha\beta)} = 0$ est une conséquence des autres.

Nous pouvons donner aux quantités $\Lambda_{33}^{(\alpha\beta)}$ des valeurs arbitraires pourvu que nos conditions soient remplies.

Le choix le plus simple est

$$(15) \quad \Lambda_{33}^{(\alpha\beta)} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots).$$

Les quantités $\Lambda_{11}^{(\alpha\beta)}$ sont maintenant déterminées, soit par les trois premières équations de (11), soit par la dernière. Nous avons

$$(16) \quad \frac{\partial \Lambda_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} = -r \frac{\partial^2 \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} - 2r \psi_{12}^{(\alpha\beta)}.$$

Alors les $\Lambda_{22}^{(\alpha\beta)}$ et les $\Lambda_{12}^{(\alpha\beta)}$ sont déterminés par deux des trois premières équations de (11). Nous considérons les deux équations $G_{11}^{(\alpha\beta)} - G_{22}^{(\alpha\beta)} = 0$ et $G_{33}^{(\alpha\beta)} = 0$. Si nous essayons d'éliminer l'une des deux inconnues, toutes deux disparaissent, et il nous reste exactement l'identité (14). Par conséquent, l'une des deux quantités peut être choisie arbitrairement, pourvu que nos conditions soient remplies.

Nous prenons $\Lambda_{12}^{(\alpha\beta)}$ sous la forme suivante qui sauvegarde la symétrie en d_1 et d_2 et qui satisfait aux conditions

$$(17) \quad \Lambda_{12}^{(\alpha\beta)} = -\frac{2^{n-1} C_{\alpha}^n}{r_1^{\frac{n+4}{2}} r_2^{\frac{n}{2}}} r(z-d_1) - \frac{2^{n-1} C_{\alpha}^n}{r_1^{\frac{n}{2}} r_2^{\frac{n+4}{2}}} r(z-d_2).$$

si n est pair, et où $n = \alpha + \beta$, et

$$(17 \text{ bis}) \quad A_{12}^{(\alpha\beta)} = -\frac{2^{n-1} C_{\alpha}^n}{r_1^{-2} r_2^{-2}} r(z-d_1) - \frac{2^{n-1} C_{\alpha}^n}{r_1^{-2} r_2^{-2}} r(z-d_2),$$

si n est impair. $C_{\alpha}^n = C_{\beta}^n$ est le coefficient de $m_1^{\alpha} m_2^{\beta}$ dans le développement de $(m_1 + m_2)^n$. L'équation qui détermine les $A_{22}^{(\alpha\beta)}$ est alors

$$(18) \quad \frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} = -r \frac{\partial^2 A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} - r \psi_{11}^{(\alpha\beta)} + r \psi_{22}^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{r} \psi_{33}^{(\alpha\beta)} + r \psi_{44}^{(\alpha\beta)} + 2 \frac{\partial A_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial z}.$$

Le système d'équations (11) peut être remplacé par les équations (13), (15), (16), (17) ou (17 bis) et (18).

Écrivons (16) et (18) sous la forme

$$\frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} = \varphi_{11}^{(\alpha\beta)},$$

$$\frac{\partial A_{22}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} = \varphi_{22}^{(\alpha\beta)}.$$

La solution de ces équations est

$$A_{11}^{(\alpha\beta)} = \int \varphi_{11}^{(\alpha\beta)} dz + F_{11}^{(\alpha\beta)}(r),$$

$$A_{22}^{(\alpha\beta)} = \int \varphi_{22}^{(\alpha\beta)} dr + F_{22}^{(\alpha\beta)}(z),$$

où les $F_{\mu\mu}^{(\alpha\beta)}$ ($\mu = 1, 2$) sont respectivement fonctions arbitraires de r seule et de z seule. Selon la condition E, il ne peut y avoir aucun terme en r seule ou en z seule. Par conséquent

$$F_{11}^{(\alpha\beta)} = 0,$$

$$F_{22}^{(\alpha\beta)} = 0.$$

Nous pouvons alors écrire la solution de (16)

$$(19) \quad A_{11}^{(\alpha\beta)} = -r \frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} - 2r \int \psi_{12}^{(\alpha\beta)} dz,$$

et la solution de (18), en intégrant par parties le premier terme à

droite,

$$(20) \quad \Lambda_{22}^{(\alpha\beta)} = -r \frac{\partial \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)} - \int r \psi_{11}^{(\alpha\beta)} dr + \int r \psi_{22}^{(\alpha\beta)} dr \\ + \int \psi_{33}^{(\alpha\beta)} dr + \int r \psi_{44}^{(\alpha\beta)} dr + 2 \int \frac{\partial \Lambda_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} dr.$$

Cette expression peut être simplifiée par l'emploi de l'identité (14), qui peut s'écrire

$$\int \left[\psi_{11}^{(\alpha\beta)} - \psi_{22}^{(\alpha\beta)} + \frac{\psi_{33}^{(\alpha\beta)}}{r^2} - \psi_{44}^{(\alpha\beta)} \right] r dr = r \int \psi_{12}^{(\alpha\beta)} dz + F_2^{(\alpha\beta)}(z) + F_1^{(\alpha\beta)}(r) = 0.$$

où $F_1^{(\alpha\beta)}(r)$ est une fonction arbitraire de r seule, et $F_2^{(\alpha\beta)}(z)$ une fonction arbitraire de z seule.

En ajoutant cela à (20), nous obtenons

$$\Lambda_{22}^{(\alpha\beta)} = -r \frac{\partial \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)} - \int \frac{\psi_{33}^{(\alpha\beta)}}{r} dr - 2r \int \psi_{12}^{(\alpha\beta)} dz \\ + 2 \int \frac{\partial \Lambda_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} dr + F_1^{(\alpha\beta)}(r) + F_2^{(\alpha\beta)}(z).$$

Selon la condition E, nous avons, comme plus haut,

$$F_1^{(\alpha\beta)}(r) = 0,$$

$$F_2^{(\alpha\beta)}(z) = 0$$

et

$$(21) \quad \Lambda_{22}^{(\alpha\beta)} = -r \frac{\partial \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)} + 2 \int \frac{\psi_{33}^{(\alpha\beta)}}{r} dr \\ - 2r \int \psi_{12}^{(\alpha\beta)} dz + 2 \int \frac{\partial \Lambda_{12}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} dr.$$

La solution du problème est alors donnée pas à pas par les équations (15), (17) ou (17 bis), (19) et (21), comme cela est indiqué au n° 8.

10. Nous allons considérer la détermination des $\Lambda_{\mu\nu}^{11}$. Les quantités distinctes de zéro sont $\Lambda_{\mu\nu}^{11}$ ($\mu = 1, 2, 4$) et Λ_{12}^{11} . Les $\psi_{\mu\nu}^{11}$ se

calculent aisément. Ce sont :

$$\begin{aligned}\psi_{11}^{(11)} = & \frac{18}{r_1^5 r_2^5} r^2 [r^2 + (z - d_1)(z - d_2)^2 + 2r^2(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{6}{r_1^5 r_2^5} r^2 [r^2 - 2(z - d_1)^2 - 6(z - d_2)^2 \\ & \quad + 9(z - d_1)(z - d_2) + 5(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{6}{r_1^3 r_2^5} r^2 [r^2 - 6(z - d_1)^2 - 2(z - d_2)^2 \\ & \quad + 9(z - d_1)(z - d_2) + 5(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{2}{r_1^3 r_2^3} [3r^2 + 4(z - d_1)(z - d_2) + 2(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{12}{r_1^5 r_2} r^2 - \frac{12}{r_1 r_2^5} r^2 + \frac{4}{r_1^3 r_1} + \frac{4}{r_1 r_2^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{22}^{(11)} = & \frac{18}{r_1^5 r_2^5} (z - d_1)(z - d_2) [r^2 + (z - d_1)(z - d_2)^2 + 2r^2(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{6}{r_1^5 r_2^5} [-r^2(z - d_1)^2 - 2(z - d_1)^2(z - d_2)^2 \\ & \quad + 2r^2(z - d_1)(z - d_2) + 3(z - d_1)^3(z - d_2) - r^2(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{6}{r_1^3 r_2^5} [-r^2(z - d_2)^2 - 2(z - d_1)^2(z - d_2)^2 \\ & \quad + 2r^2(z - d_1)(z - d_2) + 3(z - d_1)(z - d_2)^3 - r^2(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{2}{r_1^3 r_2^3} [4r^2 + 3(z - d_1)(z - d_2) + 4(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{12}{r_1^5 r_2} (z - d_1)^2 - \frac{12}{r_1 r_2^5} (z - d_2)^2 + \frac{4}{r_1^3 r_2} + \frac{4}{r_1 r_2^3},\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r^2} \psi_{33}^{(11)} = \frac{6}{r_1^5 r_2^5} r^2 (d_2 - d_1)^2 + \frac{6}{r_1^3 r_2^5} r^2 (d_2 - d_1)^2,$$

$$\psi_{44}^{(11)} = \frac{6}{r_1^5 r_2^5} r^2 (d_2 - d_1)^2 + \frac{6}{r_1^3 r_2^5} r^2 (d_2 - d_1)^2 - \frac{4}{r_1^3 r_2^3} (d_2 - d_1)^2,$$

$$\begin{aligned}\psi_{12}^{(11)} = & \frac{9}{r_1^3 r_2^5} r [r^4(z - d_1) + r^4(z - d_2) + 2r^2(z - d_1)^2(z - d_2) \\ & \quad + 2r^2(z - d_1)(z - d_2)^2 \\ & \quad + (z - d_1)^3(z - d_2)^2 + (z - d_1)^2(z - d_2)^3] \\ & - \frac{6}{r_1^5 r_2^5} r [r^2(z - d_2) + 4(z - d_1)^2(z - d_2) \\ & \quad - 3(z - d_1)(z - d_2)^2 + 2(z - d_1)(d_2 - d_1)^2] \\ & - \frac{6}{r_1^3 r_2^5} r [r^2(z - d_1) - 3(z - d_1)^2(z - d_2) \\ & \quad + 4(z - d_1)(z - d_2)^2 + 2(z - d_2)(d_2 - d_1)^2] \\ & + \frac{1}{r_1^3 r_2^5} r [(z - d_1) + (z - d_2)] - \frac{12}{r_1^5 r_2} r(z - d_1) - \frac{12}{r_1 r_2^5} r(z - d_2).\end{aligned}$$

Nous avons supposé que notre problème admet une solution satisfaisant aux conditions du n° 3. Nous avons alors supposé que les équations (11) sont compatibles. Nous pouvons vérifier directement que c'est le cas pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$ en substituant les valeurs ci-dessus des $\psi_{\mu\nu}^{(1)}$ dans (14). Le calcul est un peu long, mais il est direct; il ne paraît nécessaire de reproduire ici aucune de ses parties.

La quantité $A_{\frac{1}{2}}^{(11)}$ est donnée par (13). Il est facile de démontrer que l'intégrale converge dans ce cas. Je n'essaierai pas d'établir ce point ici, parce que, au paragraphe suivant, nous considérerons une seconde solution du problème dans laquelle l'équation (12) peut s'intégrer immédiatement sans que l'on considère cette intégrale, pour le cas $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Nous ne considérerons pas non plus la détermination des autres $A_{\mu\nu}^{(11)}$.

11. Nous allons chercher la solution pour le second système de coordonnées. Ces coordonnées, que nous appellerons, comme auparavant, r , z , θ , t , se réduisent aux coordonnées cylindriques ordinaires si les deux masses sont nulles. Elles sont identiques à celles de (8) si l'une des masses est nulle. Les conditions du n° 3 ont été rédigées de telle façon que nous pouvons les employer sans changement dans le nouveau système. Puisque nous n'aurons plus à considérer le premier système, ce sera une simplification que de conserver exactement toutes les notations employées dans les dix premiers paragraphes. Il est facile de vérifier que dans ce système les équations (11) qui définissent les inconnues ont la même forme. Les fonctions $\psi_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ ont, bien entendu, de nouvelles valeurs.

Nous avons seulement à calculer de nouveau les valeurs des $b_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ et des $c_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ en employant la forme (8) au lieu de (7). Nous n'écrirons pas les valeurs des $c_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ que l'on fait dériver des autres en substituant r_2 à r_1 . Nous trouvons facilement, par la même méthode qu'auparavant, les valeurs suivantes des $b_{\mu\nu}^{(\alpha)}$:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} b_{\mu\mu}^{(1)} = -\frac{2}{r_1}, & b_{\mu\mu}^{(3)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \\ b_{\mu\mu}^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{r^2}, & b_{\mu\mu}^{(4)} = -\frac{1}{16} \frac{1}{r^4} \end{array} \right. \quad (\mu = 1, 2, 3),$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_{\mu\mu}^{(\alpha)} = 0 & (\mu = 1, 2, 3; \alpha > 4), \\ b_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{(\beta)} = \frac{b_\beta}{r_1^3} & (\beta = 1, 2, \dots), \\ b_{\mu\nu}^{(\beta)} = 0 & (\mu \neq \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 4), \end{array} \right.$$

où les b_β sont des constantes définies par le développement suivant les puissances de m du coefficient de dt^2 dans (8).

Quoique les équations (11) conservent une forme identique, il faut se rappeler que dans ce cas la condition F exige un choix différent des fonctions qui doivent être arbitraires. Ainsi les équations (18), (17 bis), (19) et (21) ne sont plus applicables.

Les quantités $A_{\alpha\beta}^{(\alpha\beta)}$ sont définies par (13), quand l'intégrale est convergente.

Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, l'équation (12) a une forme qui s'intègre immédiatement en termes de r_1 et r_2 .

A la place de (15) et de (17) nous prenons

$$(23) \quad A_{12}^{(\alpha\beta)} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots)$$

et

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{33}^{(\alpha\beta)} = \frac{c^{(\alpha\beta)}}{r_1^2 r_2^2} \quad (\alpha + \beta \leq 4), \\ A_{33}^{(\gamma\delta)} = 0 \quad (\gamma + \delta > 4), \\ c^{(11)} = -3, \quad c^{(21)} = c^{(12)} = -\frac{3}{2}, \\ c^{(22)} = -\frac{3}{8}, \quad c^{(31)} = c^{(13)} = -\frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

qui, ainsi qu'on peut le voir immédiatement, satisfont à toutes les conditions. Alors les $A_{11}^{(\alpha\beta)}$ sont donnés par

$$(25) \quad \frac{\partial A_{11}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} = r \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z} - r \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r \partial z} - 2r \psi_{12}^{(\alpha\beta)},$$

ce qui donne

$$(26) \quad A_{11}^{(\alpha\beta)} = r \frac{\partial A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + A_{33}^{(\alpha\beta)} - r \frac{\partial A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} - 2r \int \psi_{12}^{(\alpha\beta)} dz,$$

où la fonction arbitraire de l'intégration est omise. Elle est nulle selon la condition E.

Les $A_{22}^{(\alpha\beta)}$ sont déterminés par

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_{22}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} = & -r \frac{\partial^2 A_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} \\ & - r \frac{\partial^2 A_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r^2} - r \psi_{11}^{(\alpha\beta)} + r \psi_{22}^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{r} \psi_{33}^{(\alpha\beta)} + r \psi_{44}^{(\alpha\beta)}. \end{aligned}$$

Comme plus haut,

$$\begin{aligned} \Lambda_{22}^{(\alpha\beta)} = & -r \frac{\partial \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)} \\ & - \int r \psi_{11}^{(\alpha\beta)} dr + \int r \psi_{22}^{(\alpha\beta)} dr + \int \frac{\psi_{33}^{(\alpha\beta)}}{r} dr \\ & + \int r \psi_{44}^{(\alpha\beta)} dr - \int r \frac{\partial^2 \Lambda_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} dr. \end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée, comme l'a été (20), par l'emploi de l'identité (14). Nous obtenons

$$\begin{aligned} (28) \quad \Lambda_{22}^{(\alpha\beta)} = & -r \frac{\partial \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)}}{\partial r} + \Lambda_{44}^{(\alpha\beta)} + 2 \int \frac{\psi_{33}^{(\alpha\beta)}}{r} dr \\ & - 2r \int \psi_{12}^{(\alpha\beta)} dz - \int r \frac{\partial^2 \Lambda_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial z^2} dr. \end{aligned}$$

La solution est alors donnée par les équations (13), (23), (24), (26) et (28).

Les $\Lambda_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ peuvent être calculés pas à pas en commençant par $\Lambda_{44}^{(11)}$ comme le montre le n° 8.

Les $\psi_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ pour $\alpha + \beta = n$ sont toujours fonctions des $a_{\mu\nu}$, des $b_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$, des $c_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ et des $\Lambda_{\mu\nu}^{(\gamma\delta)}$ ($\gamma + \delta < n$) dans le cas où $n > 2$.

12. On calcule aisément les $\psi_{\mu\nu}^{(11)}$ qui sont

$$\begin{aligned} \psi_{11}^{(11)} = & -\frac{12}{r_1^5 r_2} r^2 - \frac{12}{r_1 r_2^5} r^2 - \frac{4}{r_1^3 r_2^3} (z-d_1)(z-d_2) - \frac{8}{r_1^3 r_2^3} r^2 \\ & + \frac{4}{r_1^3 r_2} + \frac{4}{r_1 r_2^3}, \\ \psi_{22}^{(11)} = & -\frac{12}{r_1^5 r_2} (z-d_1)^2 - \frac{12}{r_1 r_2^5} (z-d_2)^2 - \frac{8}{r_1^3 r_2^3} (z-d_1)(z-d_2) \\ & - \frac{4}{r_1^3 r_2^3} r^2 + \frac{4}{r_1^3 r_2} + \frac{4}{r_1 r_2^3}, \\ \frac{1}{r_2} \psi_{33}^{(11)} = & -\frac{4}{r_1^3 r_2^3} (z-d_1)(z-d_2) - \frac{4}{r_1^3 r_2^3} r^2 + \frac{4}{r_1^3 r_2} + \frac{4}{r_1 r_2^3}, \\ \psi_{44}^{(11)} = & \frac{4}{r_1^3 r_2^3} (z-d_1)(z-d_2) + \frac{4}{r_1^3 r_2^3} r^2, \\ \psi_{12}^{(11)} = & -\frac{12}{r_1^5 r_2} r(z-d_1) - \frac{12}{r_1 r_2^5} r(z-d_2) - \frac{2}{r_1^3 r_2^3} r(z-d_1) \\ & - \frac{2}{r_1^3 r_2^3} r(z-d_2). \end{aligned}$$

A l'aide de ces valeurs, on vérifie rapidement que l'identité (14) est satisfaite pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

La quatrième équation de (11) devient

$$-\frac{1}{2}\Delta A_{14} + \frac{4}{r_1^3 r_2^3} [r^2 + (z - d_1)(z - d_2)] = 0.$$

Une solution de cette équation qui satisfait à nos conditions est

$$(29) \quad A_{14}^{(11)} = \frac{4}{r_1 r_2}.$$

En employant cette valeur, et celles de $A_{12}^{(11)}$ et $A_{33}^{(11)}$ de (23) et (24) dans (26), nous obtenons, après plusieurs réductions,

$$(30) \quad A_{11}^{(11)} = -\frac{3}{r_1 r_2} + 3(d_1 - d_2)r^2 \int \frac{(z - d_1)}{r_1^5 r_2^3} [2z - (d_1 + d_2)] dz \\ - 3(d_1 - d_2)r^2 \int \frac{(z - d_2)}{r_1^3 r_2^5} [2z - (d_1 + d_2)] dz.$$

De même de (28) :

$$(31) \quad A_{21}^{(11)} = -\frac{3}{r_1 r_2} + 2(d_1 - d_2)[2z - (d_1 + d_2)] \int \frac{r^3}{r_1^5 r_2^3} dr \\ - 2(d_1 - d_2)[2z - (d_1 + d_2)] \int \frac{r^3}{r_1^3 r_2^5} dr \\ + (d_1 - d_2)(z - d_1) \int \frac{r}{r_1^5 r_2^3} [r^2 - (z - d_1)(z - d_2)] dr \\ - (d_1 - d_2)(z - d_2) \int \frac{r}{r_1^3 r_2^5} [r^2 + (z - d_1)(z - d_2)] dr.$$

J'ai donné les résultats sous cette forme pour mettre en évidence le fait que la condition F est satisfaite.

Nous pouvons les simplifier légèrement sans perdre en généralité en prenant l'origine des coordonnées à mi-chemin entre les masses m_1 et m_2 , de sorte que $d_2 = -d_1$. Dans ce cas,

$$(32) \quad A_{11}^{(11)} = -\frac{3}{r_1 r_2} + 10d_1 r_2 \int \frac{(z - d_1)}{r_1^5 r_2^3} z dz - 10d_1 r_2 \int \frac{(z + d_1)}{r_1^3 r_2^5} z dz$$

et

$$(33) \quad A_{22}^{(11)} = -\frac{3}{r_1 r_2} + 8d_1 z \int \frac{r^3}{r_1^5 r_2^3} dr - 8d_1 z \int \frac{r^3}{r_1^3 r_2^5} dr \\ + 2d_1(z - d_1) \int \frac{r}{r_1^5 r_2^3} [r^2 - (z^2 - d_1^2)] dr \\ - 2d_1(z + d_1) \int \frac{r}{r_1^3 r_2^5} [r^2 - (z^2 - d_1^2)] dr$$

On peut de même calculer les $A_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ pour

$$\alpha + \beta = 2$$

en termes des formes que je viens de donner.

On peut procéder ainsi indéfiniment.

13. Nous pouvons sans difficulté étendre les résultats obtenus plus haut au cas de n particules sur une droite. Nous procéderons pas à pas, en supposant toujours que la solution pour le cas de $n - 1$ particules a déjà été calculée. En fait, il est évident que le problème peut être posé de telle façon que les équations aient exactement la forme (11), les $\psi_{\mu\nu}$ ayant des valeurs nouvelles.

Les conditions A, ..., F ne demandent qu'une légère extension pour définir les conditions physiques du problème. Si l'on fait cette modification on constatera que la solution sera donnée comme auparavant par les équations (13), (23), (24), (26) et (28).

Nous emploierons les coordonnées r, z, θ, t qui se réduisent à celles de (6), si toutes les masses sont nulles. Supposons que les n particules de masses $m_1, \dots, m_n$ sont sur l'axe de z respectivement aux points $d_1, \dots, d_n$. Dans la condition A du n° 5, nous remplaçons les mots « deux sphères » par « n sphères » et les deux points par les n points $d_1, \dots, d_n$. Dans B nous remplacerons m_1, m_2 par $m_1, \dots, m_n$. Dans D, nous remplaçons $m_1 = m_2 = 0$ par $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$ et dans E, à la place de

$$m_1^\alpha m_2^\beta (\alpha, \beta \neq (0, 0),$$

nous écrivons

$$m_1^\alpha m_2^{\alpha_1} \dots m_n^{\alpha_n} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0).$$

A F nous substituons :

F'. Pour $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_2} = \dots = d_{\lambda_p}$ ($p \leq n$) la solution se réduit exactement à celle de $n - p + 1$ particules situées aux points correspondants, dans le système de coordonnées choisies.

De plus, nous donnerons aux r_i ($i = 1, \dots, n$) la définition

$$r_i = \sqrt{r_i^2 + (z - d_i)^2} \quad (i = 1, \dots, n).$$

La solution a alors la forme suivante :

$$(34) \quad g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} A_{\mu\nu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} \dots m_n^{\alpha_n} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 4).$$

Dans la notation de (9) les $A_{\mu\nu}^{(00\dots 0)}$ correspondent aux $a_{\mu\nu}$, et ont les valeurs données par (6). Les valeurs des $A_{\mu\nu}^{(\alpha_1\dots\alpha_n)}$, pour lesquelles $n-1$ des α_i sont nuls, peuvent être déterminées immédiatement à l'aide de (22). Nous appliquons à (22) les transformations

$$d_1 = d_i,$$

$$r_1 = r_i.$$

Les coefficients de m_s^α sont alors déterminés par la transformation pour laquelle $i = s$. C'est ce que nous avons fait au n° 6.

Les valeurs des $A_{\mu\nu}^{(\alpha_1\dots\alpha_n)}$, pour lesquelles $n-2$ des α_i sont nuls, peuvent être déterminées à l'aide de celles des $A_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ données aux paragraphes 11 et 12, par une méthode similaire à celle qui précède, mais dans ce cas il faut appliquer les transformations

$$d_1 = d_i, \quad d_2 = d_j,$$

$$r_1 = r_i, \quad r_2 = r_j.$$

Les coefficients de $m_{s_1}^\alpha m_{s_2}^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots$) sont déterminés par la transformation pour laquelle $i = s_1, j = s_2$.

De même pour le cas général où $n-p$ ($0 < p < n$) des α_i sont nuls, on peut déterminer les $A_{\mu\nu}^{(\alpha_1\dots\alpha_n)}$ à l'aide de la solution du champ de p particules. On lui applique les transformations

$$d_1 = d_{s_1}, \quad d_2 = d_{s_2}, \quad \dots, \quad d_p = d_{s_p};$$

$$r_1 = r_{s_1}, \quad r_2 = r_{s_2}, \quad \dots, \quad r_p = r_{s_p}.$$

Les coefficients de $m_{i_1}^{\alpha_1} m_{i_2}^{\alpha_2} \dots m_{i_p}^{\alpha_p}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n = 1, 2, \dots$) sont déterminés par la transformation pour laquelle $s_\lambda = t_\lambda$ ($\lambda = 1, \dots, p$).

Tous les coefficients de la série (34) sont alors déterminés en termes des solutions du champ de p particules ($p < n$), excepté ceux pour lesquels aucun des α_i n'est nul. Ces derniers coefficients sont déterminés par les équations (11). Il est bien entendu que les indices (α, β) sont maintenant remplacés par $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Les solutions ont exactement la même forme qu'auparavant, en termes des $\psi_{\mu\nu}^{(\alpha_1\dots\alpha_n)}$. On les obtient en procédant pas à pas comme cela a été expliqué au n° 8.

Nous trouvons ainsi qu'en procédant pas à pas dans les *deux*

sens définis plus haut, les équations (13), (22), (23), (25) et (27) donnent une solution du champ de n particules sur une droite. La même chose est également vraie à l'égard du premier système de coordonnées des n^{os} 5 à 9. Dans ce cas la solution est donnée par les équations (13), (17) ou (17 *bis*), (19) et (21).

Vu et approuvé :

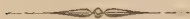
Paris, le 15 mai 1923.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MOLLIARD

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 15 mai 1923.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
PAUL APPELL.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Le prolongement analytique et la théorie des séries divergentes.

Vu et approuvé :

Paris, le 15 mai 1923.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 15 mai 1923.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
PAUL APPELL.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},

Quai des Grands-Augustins, 55.

70392-23
